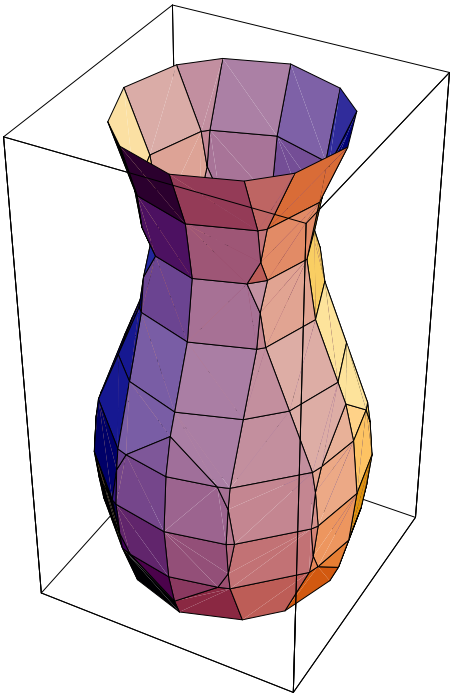
Université AbdelMalek Essaadi
Faculté Des Sciences Et Techniques Tanger
Département Des Sciences Mathématiques

Introduction à l'analyse Numérique

Première Partie



Modules M124, M118 & M144

A l'usage des étudiants du DEUG MP & PC

Abdesslam ARHRIB

Préface

Ce polycopié s'adresse aux étudiants de la deuxième année du DEUG scientifique MP et PC. Il constitue le programme des modules M124, M118 & M144 enseigné en parallèle avec une initiation à l'informatique. Des exemples d'illustration et des exercices d'application y sont proposés.

Le polycopié contient cinq chapitres dont le premier introduit *une tentative de définition de l'analyse numérique* ainsi que la terminologie utilisée par la suite. Le chapitre deux est consacré à la recherche numérique des *zéros d'équations non linéaires*, diverses méthodes y sont proposées. Le chapitre trois traite les *équations aux différences*, une application à la recherche des zéros d'un polynôme est donnée. Au chapitre quatre, nous introduisons la notion *d'approximation et d'interpolation polynômiale*. Le chapitre cinq est consacré au principe général de *l'intégration et dérivation numérique* que nous appliquons dans le cas de la méthode des rectangles celle des trapèzes, de Simpson et de Gauss. Nous présentons également, la théorie des formules de quadrature.

Une série d'exercices est presentée à la fin de chaque chapitre. Cette série d'exercice contient également des examens proposés à la FSTT depuis 1996.
Il est fortement recommandé aux étudiants de programmer toutes les méthodes étudiées soit en Pascal, Fortran, Maple ou Mathematica.

Nous vous remercions par avance pour toute remarque ou critique et/ou suggestion constructive et nous vous souhaitons bon courage.

Tanger le 10 Octobre 2004.

Abdesslam ARHRIB
e–mail: arhrib@fstt.ac.ma

Table des matières

1 Introduction et définitions **5**
1.1 Définitions . . . 5
1.1.1 Prologue . . . 5
1.1.2 Définition de l'Analyse numérique (A.N). . . . 5
1.2 Les nombres en A.N . . . 7
1.2.1 Connaissance numérique d'un nombre. . . . 7
1.2.2 Connaissance implicite d'un nombre . . . 7
1.3 Les fonctions en A.N . . . 8
1.3.1 Connaissance numérique d'une fonction . . . 8
1.3.2 Connaissance implicite d'une fonction . . . 8
1.4 Les erreurs en A.N . . . 8
1.4.1 Erreurs de méthode. . . . 8
1.4.2 Erreurs d'arrondi . . . 9
1.4.3 Précision machine . . . 9
1.4.4 Stabilité et perte de précision . . . 9

2 Résolution des équations à une variable: $f(x) = 0$ **11**
2.1 Position du problème et définitions . . . 11
2.2 Méthode de dichotomie ou des bissectrices . . . 11
2.3 Méthodes des approximations successives. . . . 13
2.3.1 Point fixe. . . . 13
2.3.2 Conditions d'existence . . . 14
2.4 La méthode de Lagrange (ou de la sécante) (1736–1813) . . . 19
2.5 Accélération de la convergence . . . 20
2.5.1 δ^2 d'Aitken . . . 20
2.5.2 Ordre d'une méthode . . . 21
2.5.3 Méthode de Steffensen . . . 22
2.6 Méthode de Newton–Raphson élementaire (1642–1727) . . . 23
2.6.1 Convergence globale de la méthode de Newton-Raphson . . . 24
2.7 La méthode combinée . . . 26
2.8 Execices . . . 28

3 Equations aux différences **35**
3.1 Equations aux différences . . . 35
3.1.1 Introduction et motivations . . . 35
3.1.2 Equations aux différences du premier ordre . . . 35
3.1.3 Equations aux différences d'ordres N . . . 36
3.2 Résolution des équations aux différences . . . 36
3.2.1 Equation du premier ordre . . . 36
3.2.2 Equations aux différences du second ordre . . . 37
3.3 Schéma de Horner . . . 38

3.3.1 Algorithme 1 . . . 38
3.3.2 Nombre d'opérations: d'additions et multiplications: . . . 38
3.3.3 Application du schéma d'Horner à l'évaluation de la dérivée d'un polynôme . 39
3.3.4 Algorithme 2 . . . 40
3.4 Application à la recherche des zéros d'un polynôme . . . 41
3.4.1 Méthode de Newton–Raphson . . . 41
3.4.2 Méthode de Bernoulli (1654–1705) . . . 41
3.4.3 Théorème genéral: . . . 42
3.5 Exercices . . . 45

4 Interpolation et approximation polynômiale 47
4.1 Introduction . . . 47
4.1.1 Objectif de l'interpolation . . . 47
4.1.2 Un exemple constructif . . . 48
4.2 Approximation polynômiale de Taylor . . . 49
4.2.1 Exemple d'estimation de l'erreur . . . 50
4.2.2 A propos de l'erreur . . . 50
4.3 Interpolation polynômiale de Lagrange . . . 51
4.3.1 Existance et unicité du polynôme de Lagrange . . . 51
4.3.2 Exemple . . . 53
4.3.3 Autre écriture du Polynôme de Lagrange . . . 53
4.3.4 Estimation de l'erreur . . . 54
4.4 Interpolation polynômiale de Newton . . . 55
4.4.1 Polynôme de Newton . . . 55
4.4.2 Exemple . . . 56
4.4.3 Interpolation polynômiale de Newton . . . 56
4.5 Polynôme de Chebyshev . . . 57
4.5.1 Polynôme de Chebyshev . . . 57
4.6 Exercices . . . 61

5 Intégration et dérivation numérique 65
5.1 Introduction . . . 65
5.1.1 Objectif . . . 65
5.1.2 Rappels: . . . 65
5.1.3 Intérpretation géomètrique de l'intégrale . . . 65
5.1.4 Principe du calcul approché: . . . 66
5.2 Formule des réctangles (avec point milieu): . . . 67
5.2.1 Formule élémentaire: . . . 67
5.2.2 Formule composée: . . . 68
5.2.3 Propriétés. . . . 68
5.2.4 Estimation de l'erreur. . . . 69
5.2.5 Exemple . . . 69
5.3 La méthode des trapèzes . . . 70
5.3.1 La formule élémentaire: . . . 70
5.3.2 Formule composée . . . 71
5.3.3 Propriétés . . . 71
5.3.4 Estimation de l'erreur . . . 71
5.3.5 Exemple . . . 72
5.4 Accélération de la convergence : Méthode de Simpson (1710-1761). . . . 72
5.4.1 Formule élémentaire . . . 72
5.4.2 Formule composée . . . 73

5.4.3 Propriétés 74
5.4.4 Estimation de l'erreur. 74
5.4.5 Exemple 74
5.5 La méthode de Gauss (à deux points) 74
5.5.1 Principe de la méthode de Gauss à deux points 74
5.5.2 Exemple 76
5.6 Formule de quadrature 76
5.6.1 Préliminaire et exemples 76
5.6.2 Définitions 77
5.6.3 Ordre de la méthode 77
5.7 Dérivation numérique 79
5.7.1 Approximation polynômiale 79
5.7.2 Approximation de la dérivée première 79
5.7.3 Approximation de la dérivée seconde 81
5.7.4 Approximation des dérivées partielles 81
5.8 Exercices 83

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Corrigés
Mathématiques
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..